dressing chainのスペクトル曲線とHamilton構造 (可積分系研究における双線形化法とその周辺)

高崎, 金久

数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 98-116

dressing chain のスペクトル曲線と Hamilton 構造

京都大学総合人間学部　高崎金久 (Kanehisa Takasaki)

1　はじめに

「dressing chain」[1] は Shabat ら [1, 2] によって導入された概念で，Darboux 変換と定数 α_j によるずらしを組み合わせた関係

$$(\partial_x - v_j)(\partial_x + v_j) = (\partial_x + v_{j+1})(\partial_x - v_{j+1}) + \alpha_j \tag{1}$$

で結ばれた 1 次元 Schrödinger 作用素

$$L_j = (\partial_x + v_j)(\partial_x - v_j) = \partial_x^2 - u_j \tag{2}$$

の列を意味する．j は整数全体を走る添字である．

上の関係を v_j 達に対する微分方程式に書き直せば

$$\dot{v}_j + \dot{v}_{j+1} = v_j^2 - v_{j+1}^2 + \alpha_j \tag{3}$$

となる．ただしドットは x についての導関数をあらわす．すなわち $\dot{v}_j = dv_j/dx$．実際，このあとの議論では x を「時間変数」と解釈する方が都合がよい．

dressing chain はもともと Schrödinger 方程式のスペクトル的性質を調べる問題から派生したものだが，周期的境界条件を課したものは有限帯ポテンシャルや Painlevé 方程式とも深く関わり合っている．以下ではまず dressing chain について一般的なこと（特に二種類の Lax 形式の存在）を復習し，周期的な場合の転移行列やスペクトル曲線の構造を説明してから，Hamilton 構造について最近得た結果を紹介する．

[1]「dressing」は「衣を着せる」という意味の言葉であるが，いまだに適当な日本語訳が存在し

2 周期的dressing chain

2.1 有限帯ポテンシャルやPainlevé方程式との関係

周期的 dressing chain と有限帯ポテンシャルや Painlevé 方程式との関連を最初に指摘したのは Veselov と Shabat[3] である．彼らは周期的境界条件

$$v_{j+N} = v_j, \quad \alpha_{j+N} = \alpha_j \tag{4}$$

の下でこの系を考察し，定数 α_j の総和

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N \tag{5}$$

の値がゼロであれば有限帯ポテンシャルが現れること，ゼロでなければ $N = 3$ の場合に Painlevé IV 型方程式が現れること，などを見出した．

有限帯ポテンシャルやPainlevé方程式などとの関係を見るには前述の２階Schrödinger作用素 L_j が N 階作用素

$$M_j = (\partial_x - v_{j+N-1}) \cdots (\partial_x - v_j) \tag{6}$$

(こちらはむしろ KP 階層の「N-簡約」に現れるものを思わせる) と満たす交換関係

$$[M_j, L_j] = \alpha M_j \tag{7}$$

に注目する (この交換関係は冒頭の dressing chain の関係式から簡単な計算で導ける)．

$\alpha = 0$ ならば L_j と M_j は可換であるが，これは 1920 年代に Burchnall と Chaundy [4] が考察した「可換微分作用素対」と呼ばれる状況であり，複素代数曲線 (今の場合は超楕円曲線) に付随するテータ函数や Abel 積分でポテンシャルが書ける．もちろん，今の場合は単なる対ではなくて，そのような対が複数あり，それらが α_j でずらした Darboux 変換で鎖状に結ばれている．Veselov と Shabat はこの系の Hamilton 構造や代数幾何学的構造を詳しく論じている．

他方，$\alpha \neq 0$ の場合には，この作用素方程式は「弦の方程式」あるいは「Douglas 方程式」[5] と呼ばれる方程式

$$[L, M] = \alpha \tag{8}$$

に似ている．L はここでも２階の Schrödinger 作用素，M は高階（奇数階）作用素である．よく知られているように，Douglas 方程式は Painlevé I 型方程式やその高階拡張を書き直したものである．さらに Douglas 方程式の変形として

$$[L, M] = \alpha L \tag{9}$$

というものを考えることもあるが，こちらからは Painlevé II 型方程式とその高階拡張が現れる．周期的 dressing chain から現れた方程式はこれらとよく似ているが，L と M の役割が入れ替わっているなど，微妙な違いもあることに注目されたい．実際，同じものならば Painlevé IV 型方程式など現れるはずがない．

V.E. Adler [6] は Veselov や Shabat が見出した Painlevé 方程式との関係をさらに追求し，$N = 4$ の場合には V 型方程式が現れること，dressing chain の概念を３階作用素（当然 Boussinesq 方程式に関係がある）や Dirac 作用素に対して拡張すれば他の型の Painlevé 方程式も同様に扱えることなどを指摘し，さらに副産物としてこのような枠組みの中で Painlevé 方程式の離散的対称性を見出した．

興味深いことに，この周期的 dressing chain と同じものが後に野海によって Painlevé 方程式の「対称形式」として再発見されている．野海と山田 [7, 8] はこの対称形式に基づいて Painlevé 方程式の離散的対称性や多次元拡張（アフィン Lie 代数・Weyl 群との対応関係から「$A_{N-1}^{(1)}$ 型方程式系」と呼ばれる）を詳細に議論している．

2.2 $A_{N-1}^{(1)}$ 型方程式系との関係

ここでは周期 N が３以上の奇数すなわち $N = 2n+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の場合に話を限定する（偶数の場合は少しややこしくなる）．この場合，新たな従属変数

$$f_j = v_j + v_{j+1} \tag{10}$$

を導入すると v_j は逆に f_j で

$$v_j = \frac{1}{2}(f_j - f_{j+1} + f_{j+2} - \cdots - f_{j+2n-1} + f_{j+2n}) \tag{11}$$

とあらわせる．これから特に

$$v_j - v_{j+1} = \sum_{k=1}^{n} f_{j+2k} - \sum_{k=1}^{n} f_{j+2k-1}$$

という等式が成立することがわかる．これを用いると dressing chain の方程式から f_j に対する方程式

$$\dot{f}_j = f_j\Big(\sum_{k=1}^{n} f_{j+2k} - \sum_{k=1}^{n} f_{j+2k-1}\Big) + \alpha_j \tag{12}$$

が得られる．これは野海・山田の $A_{2n}^{(1)}$ 型方程式系と本質的に同じものである（$\partial_x \to -\partial_x$, $\alpha_j \to -\alpha_j$ という置き換えを行えばまったく同じ形になる）．

3 二つのLax 形式

3.1 2×2 行列型Lax表示

Veselov と Shabat は周期的 dressing chain に対する 2×2 行列型の Lax 表示を与えているが，それは $\alpha = 0$ の場合に限られたものだった．Adler はそれを少し修正して $\alpha \neq 0$ の場合（実際には周期的境界条件を置かない場合）にも通用する Lax 表示を与えている．Adler の Lax 表示はスペクトルパラメータの差分（シフト）を含むという奇妙な特徴をもつ．

Adler の Lax 表示は

$$\dot{V}_j(\lambda) = U_{j+1}(\lambda - \alpha_j)V_j(\lambda) - V_j(\lambda)U_j(\lambda) \tag{13}$$

というものである．ここで $U_j(\lambda), V_j(\lambda)$ は次のような 2×2 行列である．

$$U_j(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_j + \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_j(\lambda) = \begin{pmatrix} -v_j & 1 \\ v_j^2 + \lambda & -v_j \end{pmatrix}$$

ドットはここでも x についての導函数をあらわす．すなわち $\dot{V}_j(\lambda) = dU_j(\lambda)/dx$．これに付随する線形系は

$$\Phi_{j+1}(\lambda - \alpha_j) = V_j(\lambda)\Phi_j(\lambda), \tag{14a}$$

$$\dot{\Phi}_j(\lambda) = U_j(\lambda)\Phi_j(\lambda) \tag{14b}$$

となる．いずれにおいてもスペクトルパラメータ λ についてのシフトが含まれていることに注目されたい．なお，ここでは周期的境界条件を置く必要がないことにも注意されたい．

線形系の二番目の方程式(14b)は定常Schrödinger方程式を行列形に書き直したものである．これを通常のようなスカラー形に書き直すためには，ベクトル値波動函数 $\Phi_j(\lambda)$ を

$$\Phi_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_j(\lambda) \\ \dot{\phi}_j(\lambda) \end{pmatrix}$$

というようにあらわせばよい．このとき(14a)と(14b)はそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi_{j+1}(\lambda - \alpha_j) &= (\partial_x - v_j)\phi_j(\lambda), \qquad (15a) \\ \lambda\phi_j(\lambda) &= (\partial_x^2 - u_j)\phi_j(\lambda) \qquad (15b) \end{aligned}$$

という方程式になる．

この線形系は，定常Schrdinger方程式が λ のシフトを含む線形方程式と連立した，あまり見慣れない形をしている．Adlerはこれを 3×3 行列（3階の微分作用素の定常問題を書き直したもの）やDirac型の方程式に拡張したものも考えているが，いずれも同様の特徴を備えている．

実はこの背後には「双対Lax表示」と呼ぶべき別の線形系が存在し，それが上のLax表示と「Mellin変換」によって結ばれている．このことを説明して行こう．

3.2 双対Lax表示

野海と山田[9]は「Drinfeld-Sokolov系」[10]に対するLax表示を借りて $A_{N-1}^{(1)}$ 型方程式系のLax表示を与えている．これは $N \times N$ 行列型のLax表示である．彼らは他のアフィンLie代数に付随する方程式系についても議論しているが，ここではこの $A_{N-1}^{(1)}$ 型に焦点を絞る．この場合には背後に A_∞ 型方程式系と呼ぶべき無限系があって，その周期的簡約として理解することもできる．ここではこの無限系から出発してみよう．

この無限系は「変形KP階層」に自己相似条件を課してから時間変数を有限個のみ残したもので，最初の時間変数 $t_1 = x$ （つまりKP階層の空間変数）のみ残したものは

$$\begin{aligned} \partial_x\psi_j(z) &= \psi_{j+1}(z) + v_j\psi_j(z), \qquad (16a) \\ \alpha z\partial_z\psi_j(z) &= \psi_{j+2}(z) + f_j\psi_{j+1}(z) + e_j\psi_j(z) \qquad (16b) \end{aligned}$$

という線形系の Frobenius 可積分条件で与えられる（それをさらに j についての差分作用素で定式化することもできるが，ここでは立ち入らない）．e_j は新たに導入した量である．Frobenius 可積分条件を書き下すと

$$
\begin{aligned}
f_j - f_{j+1} &= v_j - v_{j+2}, \qquad (17a)\\
\dot{f}_j &= f_j(v_j - v_{j+1}) + e_{j+1} - e_j, \qquad (17b)\\
\dot{e}_j &= 0 \qquad (17c)
\end{aligned}
$$

となる．v_j については微分方程式が現れないことに注意されたい．(17a) は実は f_j について解くことができる．この式を

$$f_j - v_j - v_{j+1} = f_{j+1} - v_{j+1} - v_{j+2}$$

と書き直してみれば，両辺は j によらない x の函数 $g(x)$ であり，v_j に $g(x)/2$ を足し算することでこの式の両辺 0 にできる．同時に $\psi_j(z)$ を $\exp[\int g(x)dx/2]$ でゲージ変換しておけば v_j の変化を打ち消すことができて，もとと同じ形の線形系が残る．こうして一般性を失うことなく

$$f_j = v_j + v_{j+1}$$

という条件を課すことができるが，これは最初に v_j から f_j を導入したときの定義式 (10) そのものである．これを Frobenius 可積分条件の二番目の方程式 (17b) に代入し，α_j を

$$\alpha_j = e_{j+1} - e_j \qquad (18)$$

というように定義すれば，dressing chain の方程式 (3) が再現される．なお，(17c) は e_j が x によらない定数であることを示している．

周期的境界条件を課せば，これは野海・山田の $A_{N-1}^{(1)}$ 型方程式系の Lax 表示になる．周期的境界条件は $\psi_j(z)$ で言えば

$$\psi_{j+N}(z) = z\psi_j(z) \qquad (19)$$

という条件（Bloch-Floquet 関係式）である．これに付随する v_j, f_j, e_j の条件は

$$v_{j+N} = v_j, \quad f_{j+N} = f_j, \quad e_{j+N} = e_j + \alpha \qquad (20)$$

となる．e_j の条件に付加項 α が現れることに注意されたい．周期的境界条件を課すまでは α は任意パラメータだったが，ここではじめて α_j 達と (5) の関係によって結ばれることになる．線形系は

$$\Psi(z) = {}^t(\psi_1(z), \cdots, \psi_N(z))$$

というベクトル値の波動関数を用いて

$$\partial_x \Psi(z) = \begin{pmatrix} v_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ z & & & & v_N \end{pmatrix} \Psi(z), \tag{21a}$$

$$\alpha z \partial_z \Psi(z) = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ z & & & \ddots & f_{N-1} \\ f_N z & z & & & e_N \end{pmatrix} \Psi(z) \tag{21b}$$

という形に書きなおせる．一番目の方程式は Drinfeld-Sololov 系（変形 KdV 方程式系の拡張）に現れる 1 次元線形問題そのものである．二番目の方程式は z についての常微分方程式系で，これを一番目の方程式に従って x で変形することが一種の等モノドロミー変形になる（正確に言えば，この方程式は $\lambda = \infty$ に不確定特異点をもつので Stokes 係数も保存する変形と考えなければならない）．Painlevé 方程式が等モノドロミー変形と解釈されることを思い出せば，これは自然な見方であろう．

Painlevé 方程式やその多次元拡張である Garnier 系を等モノドロミー変形として特徴づけるには，2 階単独方程式あるいは 2×2 連立系を用いるのが普通である [11]．今の設定はそれとは違うもので，たとえば Painlevé IV 型方程式は $N = 3$ すなわち 4×4 連立系で定式化されている．また，連立系の構造自体も異なっている．その意味で，上の Drinfeld-Sokolov 型の Lax 表示は Painlevé 方程式の等モノドロミー変形として特徴付けという観点から見ても興味深いものである．

3.3 二つのLax表示の関係

dressing chain に対するこれら二つの Lax 表示の関係であるが，これは $\phi_j(\lambda)$ と $\psi_j(z)$ の間に

$$\psi_j(z) = \int z^{\lambda/\alpha}\phi_j(\lambda - e_j)d\lambda \tag{22}$$

という関係を置くことによって対応する．これは $\phi_j(\lambda)$ の変数を λ を $\lambda - e_j$ にシフトしたのち，Mellin 変換と呼ばれる積分変換を施したものである．ただし，この積分は実際に行うのではなくて「形式的」なもの（収束することなどは必ずしも想定していない）と理解する．これで二つの線形系が結ばれることは

$$\begin{aligned}
z\partial_z\psi_j(z) &= \int z^{\lambda/\alpha}\lambda\phi_j(\lambda - e_j)d\lambda, \\
(\partial_x - v_j)\psi_j(z) &= \int z^{\lambda/\alpha}(\partial_x - v_j)\phi_j(\lambda - e_j)d\lambda, \\
\psi_j(z) &= \int z^{\lambda/\alpha}\phi_{j+1}(\lambda - e_{j+1})d\lambda \\
&= \int z^{\lambda/\alpha}\phi_{j+1}(\lambda - e_j - \alpha_j)d\lambda
\end{aligned}$$

などの等式を見れば了解できるだろう．積分記号はあくまで積分の外側の演算と内側の演算を対応付けるだけの役割を果たしている（「形式的積分」とはそういう意味である）．

このようにして，Adler の与えた見慣れない Lax 形式が普通の形の Lax 形式から導出できることがわかった．特に λ についてのシフト演算は本質的には zd/dz という微分演算子を Mellin 変換を通して見たものだったのである．

二つの Lax 表示はこのように等価であるから，必要に応じて使いやすい方に乗り換えてよい．野海・山田の与えた Drinfeld-Sokolov 流の Lax 表示は（Drinfeld-Sokolov 系そのものがそうであるように）他のアフィン Lie 代数へ拡張できるのが強みである．これに対して Adler の Lax 表示はいまのところ限られた場合にしか使えない．その反面で，Adler の Lax 表示は $\alpha = 0$ と $\alpha \neq 0$ の二つの場合を対等に扱うことができる（このことは以後の議論で重要になる）．Drinfeld-Sokolov 流の Lax 表示では $\alpha \to 0$ を一種の特異極限として扱う必要がある．

4 周期的dressing chainのスペクトル曲線

4.1 転移行列の導入

以下，N-周期的な dressing chain を考える．Adler の Lax 表示では $U_j(\lambda), V_j(\lambda)$ も N-周期性をもつ．周期的境界条件での戸田格子や Heisenberg スピン鎖の取り扱いにならって転移行列（transition matrix）[2]．

$$T_j(\lambda) = V_{j+N-1}(\lambda - \alpha_j - \cdots - \alpha_{j+N-2}) \cdots V_{j+1}(\lambda - \alpha_j) V_j(\lambda) \tag{23}$$

を導入する．$\Phi_j(\lambda)$ に対する線形系が λ のシフトを含むことに伴って，ここでも λ をシフトしたものが現れることに注意されたい．この転移行列は

$$\dot{T}_j(\lambda) = U_j(\lambda - \alpha) T_j(\lambda) - T_j(\lambda) U_j(\lambda) \tag{24}$$

という Lax 方程式に従う．特に，$\alpha = 0$ ならば転移行列は等スペクトル変形に従うことがわかる．

4.2 スペクトル曲線

転移行列の固有値方程式

$$\det(zI - T_j(\lambda)) = 0 \tag{25}$$

によってスペクトル曲線が定義される．$\alpha = 0$ ならばこの曲線は j によらない（その意味で転移行列は j についても離散的等スペクトル変形である）．$\alpha \neq 0$ の場合にはスペクトル曲線は j によって変化する (実際には x にも依存する)．

以下では j についての離散力学には立ち入らないで，$j = 1$ の場合すなわち

$$T(\lambda) = T_1(\lambda) = V_N(\lambda - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{N-1}) \cdots V_2(\lambda - \alpha_1) V_1(\lambda) \tag{26}$$

のみを考えることにしよう．転移行列は 2×2 行列なので，スペクトル曲線の方程式は

$$z^2 - P(\lambda) z + Q(\lambda) = 0 \tag{27}$$

[2]量子逆散乱法の用語に従ってこのように呼ぶことにする．量子逆散乱法ではこの転移行列の行列要素自体が演算子である．転移行列のトレースが転送行列（transfer matrix）と呼ばれるものである．以上の言葉の使い分けは和達三樹氏に従った．

となる．ただしここで

$$P(\lambda) = \mathrm{Tr}\, T(\lambda), \quad Q(\lambda) = \det T(\lambda) \tag{28}$$

と定義した．$Q(\lambda)$ については転移行列の定義から

$$Q(\lambda) = -\lambda \prod_{j=1}^{N-1} (\alpha_1 + \cdots + \alpha_j - \lambda) \tag{29}$$

という表示が得られる（これは λ の N 次多項式である）．$P(\lambda)$ はこのように簡単な形には書けない．転送行列を

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

とあらわせば，行列要素は次のような λ の多項式であることがわかる：

1. $N = 2n+1$ のとき，$\deg A(\lambda) = \deg B(\lambda) = \deg D(\lambda) = n$，$\deg C(\lambda) = n+1$ であり，$B(\lambda)$ はモニック（すなわち最高次係数が 1）である．特に $P(\lambda)$ は

$$P(\lambda) = I_0 \lambda^n + I_1 \lambda^{n-1} + \cdots + I_n \tag{30}$$

という形の多項式である．I_0 は

$$I_0 = -\sum_{j=1}^{2n+1} f_j \tag{31}$$

とあらわせる．

2. $N = 2n+2$ のとき，$\deg A(\lambda) = \deg C(\lambda) = \deg D(\lambda) = n+1$，$\deg B(\lambda) = n$ であり，$A(\lambda)$ と $D(\lambda)$ はモニックである．$B(\lambda)$ はモニックではないが，λ^n の係数 b_0 は

$$b_0 = -\sum_{j=0}^{n} f_{2j+1} = -\sum_{j=0}^{n} f_{2j+2} \tag{32}$$

とあらわせる（二通りの表示はともに $-\sum_{j=1}^{2n+2} v_j$ に等しい）．特に $P(\lambda)$ は

$$P(\lambda) = 2\lambda^{n+1} + I_0 \lambda^n + \cdots + I_n \tag{33}$$

という形の多項式である．I_0 は

$$I_0 = b_0^2 - \sum_{j=1}^{2n+1} (\alpha_1 + \cdots + \alpha_j) \tag{34}$$

とあらわせる．

$P(\lambda)$ の係数は $\alpha = 0$ の場合には x によらない保存量であるが，$\alpha \neq 0$ の場合には保存量ではない．言い換えれば，スペクトル曲線は x に依存して変化する（あとでこの x 依存性を議論する）．

以上のことから特に，スペクトル曲線が超楕円曲線であることがわかる．それを見るにはスペクトル曲線の方程式を z の２次方程式と思って解いてみればよい．結果は

$$z = \frac{1}{2}(P(\lambda) + \sqrt{R(\lambda)})$$

となる．ここで

$$R(\lambda) = (P(\lambda))^2 - 4Q(\lambda) \tag{35}$$

と定義した．したがってスペクトル曲線は本質的には

$$y^2 = R(\lambda) \tag{36}$$

という形の超楕円曲線であり（$N = 2n+1, 2n+2$ のいずれの場合も種数 n），z はその上で定義された有理型函数で，λ, y を用いて

$$z = \frac{1}{2}(P(\lambda) + y) \tag{37}$$

というようにあらわせる，ということがわかる．

5 周期的 dressing chain の Hamilton 構造

5.1 Dubrovin 方程式

$B(\lambda)$ は $N = 2n+1, 2n+2$ のいずれの場合も n 次多項式となる．唯一の違いは N が奇数の場合にはモニックになることである．$B(\lambda)$ の根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とあらわす：

$$B(\lambda) = b_0 \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k) \tag{38}$$

（$N = 2n+1$ のときには $b_0 = 1$ である）．このとき $T(\lambda)$ の満たす Lax 方程式

$$\dot{T}(\lambda) = U_1(\lambda - \alpha)T(\lambda) - T(\lambda)U_1(\lambda) \tag{39}$$

から λ_k に対する微分方程式

$$\dot{\lambda}_k = \frac{\sqrt{R(\lambda_k)}}{B'(\lambda_k)} \tag{40}$$

が導かれる（導出法をあとで示す）．ここでプライム $'$ は λ についての導函数をあらわす．この形の方程式は有限帯ポテンシャルの記述にも現れる [12] ので，その名称を借りて，この方程式も「Dubrovin 方程式」と呼ぶことにしよう．ただし，有限帯ポテンシャルの場合の Dubrovin 方程式は自励系だが，今の場合は $R(\lambda)$ が x に陽に依存するので非自励系になる．分母は要するに

$$B'(\lambda_k) = b_0 \prod_{l \neq k} (\lambda_k - \lambda_l)$$

という形の差積である．分子の平方根は一種の略記法で（そもそもこのままでは符号があいまいである），本当の意味はこの方程式の導出の過程で明確になる．

Dubrovin 方程式は Lax 方程式 (39) から以下のようにして導出される．Lax 方程式を行列要素で書けば，$A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$ に対する 4 つの方程式

$$\begin{aligned}
\dot{A}(\lambda) &= C(\lambda) - B(\lambda)(u_1 + \lambda), && \text{(41a)}\\
\dot{B}(\lambda) &= D(\lambda) - A(\lambda), && \text{(41b)}\\
\dot{C}(\lambda) &= (u_1 + \lambda - \alpha)A(\lambda) - D(\lambda)(u_1 + \lambda), && \text{(41c)}\\
\dot{D}(\lambda) &= (u_1 + \lambda - \alpha)B(\lambda) - C(\lambda). && \text{(41d)}
\end{aligned}$$

になる．第 2 の方程式 (41b) に $\lambda = \lambda_k$ を代入すると，左辺は

$$\dot{B}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} = -B'(\lambda_k)\dot{\lambda}_k$$

となるので λ_k に対する方程式

$$\dot{\lambda}_k = \frac{A(\lambda_k) - D(\lambda_k)}{B'(\lambda_k)} \tag{42}$$

が得られる．これが Dubrovin 方程式 (40) の本当の姿である．実際，$\lambda = \lambda_k$ に対しては $B(\lambda)$ が消えて $T(\lambda)$ が下三角行列になるので，この式の右辺の分子の平方は

$$(A(\lambda_k) - D(\lambda_k))^2 = (A(\lambda_k) + D(\lambda_k))^2 - 4A(\lambda_k)D(\lambda_k) = R(\lambda_k)$$

とあらわせる．その平方根が (40) の右辺に他ならない．特に，(40) では平方根の符号が不明だったが，今の計算によって，平方根を $A(\lambda_k) - D(\lambda_k)$ に一致するように選ばなければならない，ということがわかったわけである．

以後の議論の最終目標は，λ_k の共役変数を導入して，この方程式を Hamilton 形式に書き直すことである．

5.2 スペクトル曲線上の n 個の点

λ_k の共役変数 z_k（正確に言えば，あとでわかるように，$\log z_k$ が λ_k の正準共役である）を

$$z_k = A(\lambda_k) \tag{43}$$

と定義する．Dubrovin 方程式の導出の際にも注意したことだが，$T(\lambda)$ は $\lambda = \lambda_k$ において

$$T(\lambda_k) = \begin{pmatrix} A(\lambda_k) & 0 \\ C(\lambda_k) & D(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

というように三角行列になるので，$z_k = A(\lambda_k)$ は $T(\lambda_k)$ の固有値の一つである．特に，

$$z_k^2 - P(\lambda_k) z_k + Q(\lambda_k) = 0 \tag{44}$$

という等式が成立して，(λ_k, z_k) という点はスペクトル曲線に乗っていることがわかる．このようにして転移行列 $T(\lambda)$ からスペクトル曲線の上の n 個の点の系 $(\lambda_1, z_1), \ldots, (\lambda_n, z_n)$ が決まる．

スペクトル曲線上にこのような点の系を考えることは有限帯ポテンシャル [12] や有限次元の可積分系（等スペクトル変形）[13, 14] の研究ではおなじみのことである．その場合のスペクトル曲線は時間に依らず一定で，この点の系は一つの閉じた力学系となる．こうして Lax 方程式をスペクトル曲線上の点の力学系へ写像することができる．その延長上に Sklyanin の「変数分離法」[15] の研究（これは古典可積分系と量子可積分系の両方を視野に入れたものである）がある．その中で Sklyanin が強調してきたように，この写像は実は正準変換であり，スペクトル曲線上の点の座標はもとの系に対する新しい正準座標であって，この新しい正準

座標によって問題の系は変数分離されている（スペクトル曲線が1自由度力学系の等エネルギー曲線に相当する）のである．

Painlevé 方程式をはじめとする等モノドロミー変形の場合にも同様の写像（およびそれに伴って得られる新たな正準座標）が構成できることが知られている[16, 17]．ただし，等モノドロミー変形の場合にはスペクトル曲線上の点のみならず，スペクトル曲線自体も時間に依存して，全体として複雑な力学系となる．特に，系は新しい正準変数でも変数分離されない．それでもこの写像は等モノドロミー変形を考える上で重要な意味をもつ．実際，2×2 連立系の等モノドロミー変形から Garnier 系を導出する古典的議論 [11] にも実はスペクトル曲線とそれに伴うこのような写像が隠れている．

5.3 Hamilton 形式の方程式

以上の準備のもとに，主結果を述べることができる．

主結果 Dubrovin 方程式 (42) は $(\lambda_k, \log z_k)$ を正準変数とする Hamiton 形式の方程式

$$\dot{\lambda}_k = z_k \frac{\partial H}{\partial z_k}, \quad \dot{z_k} = -z_k \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \tag{45}$$

と同値である．Hamiltonian H は N の奇偶に応じて次の形で与えられる．

1. $N = 2n + 1$ のとき

$$H = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k + Q(\lambda_k) z_k^{-1} - I_0 \lambda_k^n}{B'(\lambda_k)} \tag{46}$$

2. $N = 2n + 2$ のとき

$$H = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k + Q(\lambda_k) z_k^{-1} - 2\lambda_k^{n+1} - I_0 \lambda_k^n}{B'(\lambda_k)} \tag{47}$$

証明の概略は節を改めて示す．これに関する注意をいくつか補足しておく．

1. 周期的戸田格子との比較 この Hamilton 系を周期的戸田格子から同様にして得られる Hamilton 系と見比べると面白い．$n+1$-周期的戸田格子のスペクトル曲線は

$$z^2 - P(\lambda) z + c = 0$$

という形をしている．ここで $P(\lambda)$ は

$$P(\lambda) = \lambda^{n+1} + I_2\lambda^{n-1} + \cdots + I_n$$

という形の多項式，また c はゼロでない定数である．格子を一周する 2×2 の転送行列から n 対の従属変数 λ_k, z_k が今の場合とほぼ同じ構成法で導入され，やはり

$$\dot{\lambda}_k = z_k \frac{\partial H}{\partial z_k}, \quad \dot{z}_k = -z_k \frac{\partial H}{\partial \lambda_k}$$

という形の Hamilton 形式の運動方程式に従う．Hamiltonian は

$$H = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k + cz_k^{-1} - \lambda_k^{n+1}}{B'(\lambda_k)}$$

という形をとる．ただし $B(\lambda)$ はモニックな多項式すなわち

$$B(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k)$$

である．両者の類似性は明らかだろう．

2．係数の時間依存性 Hamiltonian に現れる係数 I_0 は $\alpha = 0$（すなわち周期的戸田格子と同様の等スペクトル系）の場合には定数だが，$\alpha \neq 0$ の場合には次のように時間に依存する．

1. $N = 2n+1$ のとき $b_0 = 1$ であるが

$$\dot{I}_0 = -\sum_{j=1}^{2n+1} \dot{f}_j = -\alpha \tag{48}$$

となる．

2. $N = 2n+2$ のとき

$$\dot{b}_0 = -\sum_{j=0}^{n} \dot{f}_{2j+1} = -\frac{\alpha}{2} \tag{49}$$

となる．I_0 はこの x に依存する b_0 によって (34) のようにあらわされる．

このように，$\alpha \neq 0$ の場合の dressing chain はこの Hamilton 形式で見ても非自励系である．

3. Hamiltonian とスペクトル曲線の方程式の係数との関係 Cauchy の補間公式を用いると，この Hamiltonian は

$$H = \frac{I_1}{b_0} \tag{50}$$

というようにあらわされることがわかる．

5.4 主結果の証明の概略

証明はかなり技術的になるので，ここでは概略のみ記しておく．

Dubrovin 方程式 (42) から λ_k に対する微分方程式が従うことはすぐにわかる．実際，定義に即して計算すれば $z_k\partial H/\partial z_k$ は

$$z_k\frac{\partial H}{\partial z_k} = \frac{z_k - Q(\lambda_k)z_k{-1}}{B'(\lambda_k)}$$

という形にあらわせるが，他方

$$Q(\lambda_k) = A(\lambda_k)D(\lambda_k) = z_kD(\lambda_k)$$

に注意すると Dubrovin 方程式 (42) は

$$\dot{\lambda}_k = \frac{z_k - Q(\lambda_k)z_k^{-1}}{B'(\lambda_k)}$$

と書き直せて，両者の一致がわかる．逆をたどれることも明らかだろう．

z_k に対する微分方程式についても同様で，$-z_k\partial H/\partial\lambda_k$ と $\dot{\lambda}_k$ を個別に計算して最後に一致することを示すのだが（この計算には Dubrovin 方程式は使わない），こちらの方は少し計算が必要である．$-z_k\partial H/\partial\lambda_k$ の計算の方は，途中で

$$\dot{P}(\lambda_k) = \dot{P}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k} = 0$$

という等式を利用して余分な項が消えることを示すのが鍵である．この等式は転送行列の行列要素の満たす方程式 (41a), (41d) からただちに従う．実際，これらから

$$\dot{P}(\lambda) = \dot{A}(\lambda) + \dot{D}(\lambda) = -\alpha B(\lambda)$$

という等式が得られ，ここに $\lambda = \lambda_k$ を代入すれば右辺が消える．

6 まとめ

周期的 dressing chain には二種類の Lax 表示がある．本稿ではそのうちの 2×2 行列型の Lax 表示から出発して

1. 転移行列 $T(\lambda)$
2. スペクトル曲線 $z^2 - P(\lambda)z + Q(\lambda) = 0$
3. 行列要素 $B(\lambda) = T_{12}(\lambda)$ の零点 λ_k
4. λ_k に対する Dubrovin 方程式
5. λ_k の共役変数 z_k

を順次導入し，もとの dressing chain の方程式をスペクトル曲線とその上の点の力学系の言葉に翻訳して，最終的に λ_k, z_k を正準座標（正確に言えば $\lambda_k, \log z_k$ が正準共役）とする Hamilton 形式の方程式を得た．この Hamilton 表示は周期的戸田格子などの同様な Hamilton 表示とよく似た構造をもつことがわかった．

周期的 dressing chain の Hamilton 構造については Veselov と Shabat[3] がおもに $\alpha = 0$ の場合について詳しく考察している．また，野海と山田 [8] は α が一般の値をとる場合も通用する形で論じている．本稿で示した Hamilton 表示はスペクトル曲線に基づくもので，伝統的な代数幾何学的 Hamilton 構造 [18] の考え方を踏襲したものといえる．今の場合，$\alpha \neq 0$ のときの Hamilton 表示は自励系ではないが，その時間依存性は $\alpha = 0$ のときの保存量 I_0 が時間依存量に変わるという形で取り込まれている．

本稿で示した結果を他の形の方程式へ拡張することは興味ある問題である．$A_{N-1}^{(1)}$ 型以外の方程式や 3 階以上の作用素の dressing chain の場合にはスペクトル曲線が超楕円曲線ではないため，技術的には難度が増す．微分作用素を q-差分作用素に置き換えれば q-差分作用素の dressing chain が得られるが，この場合には Hamilton 形式に代わる枠組み（何らかの差分系あるいは写像系）から考え直さなければならない．これとも関連することとして，ここまでは一つの転移行列 $T_1(\lambda)$ に対して決まる正準座標 λ_k, z_k を考えてきたが，$T_j(\lambda)$ からも正準座標 $\lambda_k(j), z_k(j)$ が決まる．その j に関する依存性を記述すること（これも差分系あるいは写像系に関わる）も問題として残っている．

本研究は科学研究費補助金（課題番号 12640169）による支援を受けて行われた．

参考文献

[1] A.B. Shabat and R.I. Yamilov, Symmetries of nonlinear chains, Algbra Analiz **2** (2) (1990), 183–203.

[2] A.B. Shabat, The infinite-dimensional dressing dynamical system, Inverse Problems **6** (1992), 303–308.

[3] A.P. Veselov and A.B. Shabat, Dressing chains and the spectral theory of the Scrödinger operators, Funct. Anal. Appl. **27** (1993), 81–96.

[4] J.L. Burchnall and T.W. Chaundy, Commutative ordinary differential operators, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **21** (1922), 420–440.

[5] M. Douglas, Strings in less than one-dimension and the generalized K-dV hierarchies, Phys. Lett. **238B** (1990), 176–180.

[6] V.E. Adler, Recutting of polygons, Funkt. Anal. Pril. **27** (2) (1993), 79–82; Nonlinear chains and Painlevé equation, Physica **D73** (1994), 335–351.

[7] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, Commun. Math. Phys. **199** (1998), 281–195.

[8] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483–503.

[9] 山田泰彦「Painlevé 系から見た soliton 方程式入門」，高野恭一・野海正俊編「パンルヴェ方程式の眺望」，Rokko Lectures in Mathematics vol. 7, pp. 1–16 (神戸大学理学部数学教室，2000 年)
野海正俊「パンルヴェ方程式」(朝倉書店，2000 年)

[10] V.G. Drinfeld and V.V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, J. Soviet Math. **30** (1985), 1975–2036.

[11] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Painlevé equation, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, **33** (1986), 575–618.

[12] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev and S.P. Novikov, Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear opetators and Abelian varieties, Russ. Math. Surveys **31:1** (1976), 59–146.

[13] J. Moser, Geometry of quadrics and spectral theory, in: W.-Y. Hsiang et al. (eds.), The Chern Symposium 1979, pp. 147–188 (Springer-Verlag, 1980).

[14] M. Adler, P. van Moerbeke, Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves *and* Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory, Adv. Math. **38**(1980), 267–317, 318–379.

[15] E.K. Sklyanin, Separation of variables — new trends, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35–60.

[16] J. Harnad, "Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras," Commun. Math. Phys. **166**, 337–365 (1994).

[17] J. Harnad and M.A. Wisse, "Loop algebra moment maps and Hamiltonian models for the Painlevé transcendents," AMS-Fields Inst. Commun. **7**, 155–169 (1996).

[18] S.P. Novikov and A.P. Veselov, Poisson brackets and complex tori, Proc. Steklov Inst. Math. **165** (1982), 53–65.